

Table des matières

Introduction	2
1 Espace de suites Cohen fortement p-sommables et leurs opérateurs	4
1.1 Espaces des suites classiques	4
1.2 Espace des suites fortement p -sommables	6
1.3 Idéal des opérateurs linéaires Cohen fortement p -sommants	13
1.3.1 Les Opérateurs Cohen fortement p -sommants	14
2 Les opérateurs multiple Cohen fortement p-sommants	20
2.1 Idéal multilinéaire des opérateurs Cohen fortement p -sommants	20
2.2 Les opérateurs multiple Cohen fortement p -sommants	28
2.2.1 Définitions et propriétés	28
3 Les polynômes m-homogènes Cohen fortement p-sommants	37
3.1 Polynômes m -homogènes	37
3.2 Idéal des polynômes m -homogènes Cohen fortement p -sommants	38

Introduction

La classe des opérateurs linéaires p -sommants a été introduit par A.Pietsch dans [Pie67] a une plusieurs applications dans la théorie général des espaces de Banach ; par exemple cette classe forme une généralisation naturelle pour les opérateurs de Hilbert-Schmidt entre deux espaces de Hilbert.

Dans [Pie67, p. 338] Pietsch a montré que l'identité de l_1 dans l_2 est 2-sommant mais son adjoint de l_2 dans l_∞ n'est pas 2-sommant. Pour cella, le concept des opérateurs fortement p -sommants a été introduit par Joel S.Cohen dans [Coh73] comme une caractérisation de l'adjoint des opérateurs p^* -sommants. En 2007 et principalement dans [AM07] (Achour et Mezrag), il est apparu la généralisation de l'idéal d'opérateurs linéaires fortement p -sommants au cas multilinéaire. Après sa en 2010, la version polynômiale de cet concept a été étudiée par Achour et Saadi dans [AS09]. Récemment, Campos dans [Camp12] fait une étude des opérateurs multilinéaire Cohen fortement p -sommants en utilisant les espaces des suites et en plus il est introduit la définition d'un opérateur multiple Cohen fortement p -sommants.

Notre travail de mémoire est divisé en trois chapitres qui sont les suivants.

Dans le chapitre1, on donne un aperçu général sur les espaces des suites faiblement p -sommables, l'espace des suites p -sommables et aussi un nouvel espace qu'est l'espace des suites fortement p -sommables, on essayera de comparer aussi ces espaces entre eux. On enchainera par les opérateurs fortement p -sommants (ce sont des opérateurs entre des espaces de Banach, qui transforment les suites p -sommables en suites fortement p -sommables), en donnant quelques propriétés utiles tels que quelques résultats récents

relatifs à cette classe des opérateurs, et on montre que l'espace des opérateurs linéaires fortement p -sommants est un idéal de Banach.

L'objet du chapitre 2, est d'étudier le concept d'opérateurs multilinéaires Cohen fortement p -sommant comme une généralisation naturelle du cas linéaire Mentionné dans le chapitre précédent. On donnera quelques propriétés élémentaires et quelques théorèmes de caractérisation pour cette classe. Comme conséquence nous montrons que l'espace des opérateurs multilinéaires Cohen fortement p -sommants est un multi-idéal de Banach. De plus on cite le concept des opérateurs multiple Cohen fortement p -sommants, on essaiera d'étudier la relation entre les opérateurs multilinéaires Cohen fortement p -sommant et les opérateurs multiple Cohen fortement p -sommant, et on démontrons que l'espace des opérateurs multiple Cohen fortement p -sommants est un multi-idéal de Banach.

On termine ce travail par le chapitre 3, en introduisant les concepts des polynômes m -homogènes Cohen fortement p -sommants. Comme conséquence nous montrons que l'espace des polynômes m -homogènes Cohen fortement p -sommants est un idéal des polynômes.

Chapitre 1

Espace de suites Cohen fortement p -sommables et leurs opérateurs

1.1 Espaces des suites classiques

Soient $n \in \mathbb{N}$, X un espace de Banach et $1 \leq p, p^* \leq +\infty$ (où p^* est appelé l'indice conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$).

On désigne par l_p (ou $l_p(\mathbb{k})$) l'espace des suites scalaires $(\lambda_i)_{i=1}^\infty$ telles que $\sum_{i=1}^\infty |\lambda_i|^p < +\infty$.

C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|(\lambda_i)_{i=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

L'espace l_∞ est l'espace des suites scalaires $(\lambda_i)_{i=1}^\infty$ bornées, normé par

$$\|(\lambda_i)_{i=1}^\infty\|_\infty = \sup_i |\lambda_i|$$

L'espace l_∞ est complet pour cette norme. L'espace c_0 des suites scalaires $(\lambda_i)_{i=1}^\infty$ telle que $\lim_{i \rightarrow +\infty} \lambda_i = 0$. C'est un sous espace fermé de l_∞ , donc un espace de Banach

Définition 1.1.1 Une suite $(x_i)_{i=1}^\infty$ (resp. $(x_i)_{i=1}^n$) dans X est p -sommable si la suite scalaire $(\|x_i\|)_{i=1}^\infty$ (resp. $\|x_i\|_{i=1}^n$) est dans l_p (resp. l_p^n).

On note $l_p(X)$ (resp. $l_p^n(X)$) l'espace des suites $(x_i)_{i=1}^\infty$ (resp. $(x_i)_{i=1}^n$) dans X , p -sommable, c'est un espace de Banach pour la norme

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p &= \left(\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \\ &= \sup_n \|x_n\|, \quad p = \infty \end{aligned}$$

(resp.

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{i=1}^n\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \\ &= \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|, \quad p = \infty \end{aligned})$$

Définition 1.1.2 Une suite $(x_i)_{i=1}^\infty$ (resp. $(x_i)_{i=1}^n$) dans X est faiblement p -sommable si la suite scalaire $(x^*(x_i)_{i=1}^\infty)$ (resp. $x^*(x_i)_{i=1}^n$) est dans l_p (resp. l_p^n) pour tout $x^* \in X^*$.

On note $l_p^w(X)$ (resp. $l_p^{n,w}(X)$) l'espace des suites $(x_i)_{i=1}^\infty$ (resp. $(x_i)_{i=1}^n$) dans X faiblement p -sommable. L'espace $l_p^w(X)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,w} &= \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^\infty |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} : x^* \in B_{X^*} \right\} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \\ &= \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_\infty, \quad p = \infty \end{aligned}$$

nous considérons les relations de la dualité entre les espaces des suites. On sait que, si $1 \leq p < \infty$, on a $l_p(X)^* = l_{p^*}(X^*)$ isométriquement et d'après les conséquences de Hahn-Banach on a

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^\infty x_i^*(x_i) \right| : (x_i^*)_{i=1}^\infty \in X^*, \|(x_i^*)_{i=1}^\infty\|_{p^*} \leq 1 \right\} \quad (1.1)$$

particulièrement, pour $X = \mathbb{k}$ on a $X^* = \mathbb{k}$, alors

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^\infty \lambda_i x_i \right| : \|(\lambda_i)_{i=1}^\infty\|_{p^*} \leq 1 \right\} \quad (1.2)$$

d'autre part d'après (1.2) et les conséquences de Hahn-Banach on obtient

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,w} = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^\infty \lambda_i x_i \right\| : \|(\lambda_i)_{i=1}^\infty\|_{p^*} \leq 1 \right\} \quad (1.3)$$

et

$$\|(x_i^*)_{i=1}^\infty\|_{p,w} = \sup \left\{ \|(x_i^*(x))_{i=1}^\infty\|_p : \|x\| \leq 1 \right\} \quad (1.4)$$

Proposition 1.1.3 [DJT95]

(a) On sait que $l_p^w(X) = l_p(X)$ pour $1 \leq p < \infty$ si seulement si $\dim X$ est fini

(b) Si $1 < p \leq \infty$ on a $l_p^w(X) = \mathcal{L}(l_{p^*}, X)$ isométriquement

(c) Si $p = 1$ on a $l_1^w(X) = \mathcal{L}(c_0, X)$ isométriquement

Remarque 1.1.4 Si $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ et $(\varphi_i)_{i=1}^n \in Y^*$, d'après (1.4) on a

$$\begin{aligned} \|(\varphi_i \circ T)_{i=1}^n\|_{p^*,w} &= \sup_{x \in B_X} \|(\varphi_i(T(x)))_{i=1}^n\|_{p^*} \\ &= \|T\| \sup_{x \in B_X} \left\| \left(\varphi_i \left(\frac{T(x)}{\|T\|} \right) \right)_{i=1}^n \right\|_{p^*} \\ &\leq \|T\| \sup_{y \in B_Y} \|(\varphi_i(y))_{i=1}^n\|_{p^*} \\ &= \|T\| \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

1.2 Espace des suites fortement p -sommables

Maintenant nous pourrions définir un nouvel espace des suites qui a été introduit par Cohen [Coh73]

Définition 1.2.1 Soit $1 \leq p \leq \infty$. Une suite $(x_i)_{i=1}^\infty$ est dite fortement p -sommable, si pour toute suite $(x_i^*)_{i=1}^\infty \in l_{p^*}^w(X^*)$, la série $\sum_{i=1}^\infty x_i^*(x_i)$ est convergente. Dans ce cas on note par $l_p\langle X \rangle$ l'espace des suites $(x_i)_{i=1}^\infty$ dans X fortement p -sommable

Proposition 1.2.2 Soit $(x_i)_{i=1}^\infty$ une suite dans X , la série $\sum_{i=1}^\infty x_i^*(x_i)$ est convergente pour toute $(x_i^*)_{i=1}^\infty \in l_{p^*}^w(X^*)$ si seulement si la série $\sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i)|$ est convergente pour toute $(x_i^*)_{i=1}^\infty \in l_{p^*}^w(X^*)$

Démonstration. \Rightarrow) Soient $(x_i^*)_{i=1}^\infty \in l_{p^*}^w(X^*)$, et $(x_i)_{i=1}^\infty$ une suite dans X :

pour $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ on pose

$$\psi_i = \begin{cases} x_i^*, & \text{if } x_i^*(x_i) \geq 0 \\ -x_i^* & \text{if } x_i^*(x_i) < 0 \end{cases}$$

et pour $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, on pose $\psi_i = x_i^* e^{-i\theta_i}$, telle que $\theta_i = \arg(x_i^*(x_i))$, dans les deux cas

la série $\sum_{i=1}^\infty \psi_i(x_i)$ est convergente car $(\psi_i)_{i=1}^\infty \in l_{p^*}^w(X^*)$, alors

$\sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i)| = \sum_{i=1}^\infty \psi_i(x_i) < \infty$ donc la série $\sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i)|$ est convergente

\Leftarrow) Soient $(x_i^*)_{i=1}^\infty \in l_{p^*}^w(X^*)$, et $(x_i)_{i=1}^\infty \in l_p\langle X \rangle$:

on a $\sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i)| \leq \sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i)| < \infty$ ■

Théorème 1.2.3 *L'espace $l_p\langle X \rangle$ est un espace normé muni de la norme définie par*

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{C,p} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^\infty x_i^*(x_i) \right| : \|(x_i^*)_{i=1}^\infty\|_{p^*,w} \leq 1 \right\}$$

Démonstration. Soit $(x_i)_{i=1}^\infty$ dans $l_p\langle X \rangle$. On doit montrer que $\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{C,p}$ est finie. Soit

T une forme linéaire sur $l_{p^*}^w(X^*)$ définie par

$$T((x_i^*)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^\infty x_i^*(x_i).$$

On définit la suite (T_n) des formes linéaires sur $l_{p^*}^w(X^*)$ par

$$T_n((x_i^*)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i).$$

On peut voir que T_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$, et on a $l_{p^*}^w(X^*)$ est complet. Le théorème de Banach-Steinhaus implique que T est continue et

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{C,p} = \|T\| < \infty$$

On peut conclure facilement que $\|\cdot\|_{C,p}$ est une norme. ■

Remarque 1.2.4 (cf. [Camp12])

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{C,p} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i)| : \|(x_i^*)_{i=1}^\infty\|_{p^*,w} \leq 1 \right\}$$

Théorème 1.2.5

(1) $l_p\langle X \rangle \subseteq l_p(X) \subseteq l_p^w(X)$ de plus

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,w} \leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p \leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{C,p}$$

pour tout $(x_i)_{i=1}^\infty \in l_p\langle X \rangle$

(2) Si $p = 1$, on a $l_1\langle X \rangle = l_1(X)$ et

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_1 = \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{C,p}$$

Démonstration.

1. Soit $(x_i)_{i=1}^\infty$ dans $l_p^w(X)$, on a

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{p,w} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^\infty |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^\infty \|x^*\|_{X^*}^p \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p$$

Ce qui donne : $l_p(X) \subseteq l_p^w(X)$.

D'autre part, d'après (1.1) et l'inclusion $B_{l_{p^*}(X^*)} \subset B_{l_{p^*}^w(X^*)}$ on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p &= \left(\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{(x_i^*)_{i=1}^\infty \in B_{l_{p^*}(X^*)}} \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i)| \right) \\ &\leq \sup_{(x_i^*)_{i=1}^\infty \in B_{l_{p^*}^w(X^*)}} \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i)| \right) \\ &= \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{C,p} \end{aligned}$$

Alors $l_p\langle X \rangle \subseteq l_p(X)$.

2. Soit $p = 1$, alors $p^* = \infty$. Soit $(x_i)_{i=1}^\infty$ dans $l_1\langle X \rangle$, d'après (1.1) on a :

$$\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{C,1} = \sup_{(x_i^*)_{i=1}^\infty \in B_{l_\infty^w(X^*)}} \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i)| \right) = \sup_{(x_i^*)_{i=1}^\infty \in B_{l_\infty(X^*)}} \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i)| \right) = \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_1$$

Alors

$$l_1\langle X \rangle = l_1(X)$$

■

Proposition 1.2.6 $(l_p\langle X \rangle, \|\cdot\|_{C,p})$ est un espace de Banach

Démonstration. Soit $(x_n)_{n=1}^\infty$ une suite de Cauchy dans $l_p\langle X \rangle$ telle que $x_n = (x_{n,i})_{i=1}^\infty$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall k, k' > n_0 : \|x_k - x_{k'}\|_{C,p} < \epsilon$$

d'après le théorème précédente on a

$$\|x_k - x_{k'}\|_p \leq \|x_k - x_{k'}\|_{C,p} < \epsilon$$

donc $(x_n)_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $l_p(X)$. On pose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \text{ et } x = (x_i)_{i=1}^\infty$$

On a

$$\|x_k - x_{k'}\|_{C,p} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_{i,k} - x_{i,k'})| : \|(x_i^*)\|_{p^*,w} \leq 1 \right\} < \epsilon$$

En faisant tendre k' vers ∞ , cela donne

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_{i,k} - x_i)| : \|(x_i^*)\|_{p^*,w} \leq 1 \right\} < \epsilon$$

Ce qui implique que $\|x_k - x\|_{C,p} < \epsilon$. Alors

$$\begin{aligned} \|x\|_{C,p} &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i)| : \|(x_i^*)\|_{p^*,w} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_i - x_{i,k}) + x_i^*(x_{i,k})| : \|(x_i^*)\|_{p^*,w} \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_{i,k} - x_i)| : \|(x_i^*)\|_{p^*,w} \leq 1 \right\} + \sup \left\{ \sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x_{i,k})| : \|(x_i^*)\|_{p^*,w} \leq 1 \right\} \\ &< \epsilon + \|x_k\|_{C,p} \\ &< \infty \end{aligned}$$

alors $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in l_p\langle X \rangle$. ■

Proposition 1.2.7 $l_p^{n,w}(X)^* = l_{p^*}^n\langle X^* \rangle$ isométriquement, pour $1 \leq p \leq \infty$

Démonstration. On définit l'application

$$\begin{aligned} \psi : l_{p^*}^n\langle X^* \rangle &\rightarrow l_p^{n,w}(X)^* \\ (x_i^*)_{i=1}^n &\mapsto f \end{aligned}$$

telle que

$$f((x_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i), \quad (x_i)_{i=1}^n \in l_p^{n,w}(X)$$

Il est clair que ψ est linéaire, d'autre part pour tout $(x_i)_{i=1}^n \in l_p^{n,w}(X)$ on a

$$\begin{aligned} |f((x_i)_{i=1}^n)| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i^*(x_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i^*(x_i)}{\|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w}} \right| \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i^{**}(x_i^*)| : \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p,w} \leq 1 \right\} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w} \\ &= \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{C,p^*} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{p,w} \end{aligned}$$

alors $\|f\| \leq \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{C,p^*}$,

$$\text{d'où } \|\psi((x_i^*)_{i=1}^n)\| \leq \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{C,p^*}$$

Ce qui implique que l'application ψ est continue avec $\|\psi\| \leq 1$

Pour la surjectivité de ψ , soit $f \in l_p^{n,w}(X)^*$. On pose $x_i^* = f \circ \varphi_i$, telle que φ_i est l'injection canonique de X dans $l_p^{n,w}(X)$ avec

$$\varphi_i(x) = (\delta_{ij}x)_j$$

où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Il est clair que $(x_i^*)_{i=1}^n \in X^*$ et $f((x_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i)$ pour $(x_i)_{i=1}^n \in l_p^{n,w}(X)$ donc

$$\psi((x_i^*)_{i=1}^n) = f$$

Il reste à montré que $\|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{C,p^*} \leq \|f\|$. Soient $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in X^{**}, \epsilon > 0$, et F le sous espace engendré par $\{x_1^{**}, \dots, x_n^{**}\}$, d'après "principe of local reflexivity" (voir [Dea1973]), il existe $S \in \mathcal{L}(F; X)$ telle que $\|S\| \leq 1 + \epsilon$ et

$$x_i^*(Sx_i^{**}) = x_i^{**}(x_i^*), i = 1, \dots, n$$

On a

$$|\sum_{i=1}^n x_i^{**}(x_i^*)| = |\sum_{i=1}^n x_i^*(Sx_i^{**})| = |f((Sx_i^{**})_{i=1}^n)| \leq \|f\| \|(Sx_i^{**})_{i=1}^n\|_{p,w}$$

De plus

$$\begin{aligned} \|(Sx_i^{**})_{i=1}^n\|_{p,w} &= \sup \left\{ \|S(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{**})\| : \|(\lambda_i)\|_{p^*} \leq 1 \right\} \\ &\leq (1 + \epsilon) \sup \left\{ \|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{**}\| : \|(\lambda_i)\|_{p^*} \leq 1 \right\} \\ &= (1 + \epsilon) \|(x_i^{**})_{i=1}^n\|_{p,w} \end{aligned}$$

Ce qui donne $|\sum_{i=1}^n x_i^{**}(x_i^*)| \leq (1 + \epsilon) \|f\| \|(x_i^{**})_{i=1}^n\|_{p^*,w}$

$$|\sum_{i=1}^n x_i^{**}(x_i^*)| \leq (1 + \epsilon) \|f\| \|(x_i^{**})_{i=1}^n\|_{p^*,w}$$

Alors

$$\sup \left\{ |\sum_{i=1}^n x_i^{**}(x_i^*)| : \|(x_i^{**})_{i=1}^n\|_{p^*,w} \leq 1 \right\} \leq (1 + \epsilon) \|f\|$$

Ce qui donne

$$\|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{C,p^*} \leq \|f\|$$

Alors l'application ψ est linéaire isométrique et surjective qui permet d'identifier le dual de $l_p^{n,w}(X)$ avec $l_{p^*}^n\langle X^* \rangle$ ■

Proposition 1.2.8 $l_p^n\langle X \rangle^* = l_{p^*}^{n,w}(X^*)$ isométriquement , pour $1 \leq p \leq \infty$

Démonstration. On définit l'application

$$\begin{aligned} \psi : l_{p^*}^{n,w}(X^*) &\rightarrow l_p^n\langle X \rangle^* \\ (x_i^*)_{i=1}^n &\longmapsto f \end{aligned}$$

telle que

$$f((x_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i), \quad (x_i)_{i=1}^n \in l_p^n \langle X \rangle$$

Il est claire que ψ est linéaire, d'autre part pour tout $(x_i)_{i=1}^n \in l_p^n \langle X \rangle$ on a

$$\begin{aligned} |f((x_i)_{i=1}^n)| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i^*(x_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i^*(x_i)}{\|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,w}} \right| \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |z_i(x_i)| : \|(z_i)_{i=1}^n\|_{l_{p^*}^w(X^*)} \leq 1 \right\} \\ &= \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \|(x_i)_{i=1}^n\|_{C,p} \end{aligned}$$

alors $\|f\| \leq \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,w}$

$$\text{d'où } \|\psi((x_i^*)_{i=1}^n)\| \leq \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,w}$$

Ce qui implique que l'application ψ est continue avec $\|\psi\| \leq 1$

Pour la surjectivité, soit $f \in l_p^n \langle X \rangle^*$. On pose $x_i^* = f \circ \varphi_i$, Il est claire que $(x_i^*)_{i=1}^n \in X^*$ et $f((x_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i)$ pour $(x_i)_{i=1}^n \in l_p^{n,w}(X)$ donc $\psi((x_i^*)_{i=1}^n) = f$.

Il reste à montré que $\|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \leq \|f\|$. si $\|x\| \leq 1$ et $\|(\lambda_i)\|_p \leq 1$ on obtient

$$\begin{aligned} \|(\lambda_i x)_{i=1}^\infty\|_{C,p} &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^\infty |x_i^*(\lambda_i x)| : \|(x_i^*)_{i=1}^\infty\|_{p^*,w} \leq 1 \right\} \\ &\leq \|(\lambda_i)\|_p \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i^*(x)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} : \|(x_i^*)_{i=1}^\infty\|_{p^*,w} \leq 1 \right\} \\ &\leq \|(\lambda_i)\|_p \|(x_i^*)_{i=1}^\infty\|_{p^*,w} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*,w} &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(\lambda_i x) \right| : \|(\lambda_i)\|_p \leq 1, \|x\| \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) \right| : \|(x_i)_{i=1}^n\|_{C,p} \leq 1 \right\} \\ &= \|f\| \end{aligned}$$

Alors l'application ψ est linéaire isométrique et surjective qui permet d'identifier le dual de $l_p^n\langle X \rangle$ avec $l_p^{n,w}(X^*)$ ■

1.3 Idéal des opérateurs linéaires Cohen fortement p -sommants

Définition 1.3.1 (opérateur de rang fini) *Un opérateur linéaire T continu de X dans Y est de rang fini s'il est somme fini d'opérateurs de la forme*

$$\begin{aligned} x^* \otimes y : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto x^* \otimes y(x) \\ &= x^*(x)y \end{aligned}$$

où $x^* \in X^*$ et $y \in Y$

L'espace des opérateurs linéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X; Y)$

Définition 1.3.2 (Idéal des opérateurs linéaire) *Un idéal des opérateurs linéaire \mathcal{I} est une classe d'opérateurs linéaires bornés tels que pour tout X et Y des espaces de Banach on a :*

(a) *L'ensemble $\mathcal{I}(X; Y)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(X; Y)$ qui contient $\mathcal{L}_f(X; Y)$*

(b) *Propriété d'idéal : si $T \in \mathcal{I}(X; Y)$, $U \in \mathcal{L}(E; X)$ et $V \in \mathcal{L}(Y; F)$*

alors $V \circ T \circ U \in \mathcal{I}(E; F)$

De plus ,si $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait :

(i) *$(\mathcal{I}(X; Y), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ est un espace de Banach*

(ii) *$\|A : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}; A(x) = x\|_{\mathcal{I}} = 1$*

(iii) *$\|V \circ T \circ U\|_{\mathcal{I}} \leq \|V\| \|U\| \|T\|_{\mathcal{I}}$*

alors $\mathcal{I}(X; Y)$, s'appelle idéal de Banach des opérateurs linéaires

1.3.1 Les Opérateurs Cohen fortement p -sommants

Définition 1.3.3 Soient $1 < p \leq \infty$, et X, Y des espaces de Banach. Un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ est Cohen fortement p -sommant s'il transforme toute suite p -sommable à une suite fortement p -sommable

i.e. l'opérateur

$$\begin{aligned}\widehat{T} : l_p(X) &\rightarrow l_p(Y) \\ (x_i)_{i=1}^\infty &\mapsto (T(x_i))_{i=1}^\infty\end{aligned}$$

est bien défini

L'espace des opérateurs linéaires Cohen fortement p -sommant de X dans Y , noté $\mathcal{D}_p(X; Y)$

Proposition 1.3.4 Soient $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ et $1 < p \leq \infty$, alors les propriétés suivantes sont équivalents

- (i) T est Cohen fortement p -sommant
- (ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(T(x_i))| \leq C \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p \|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{p^*, w}$$

pour tout $(x_i)_{i=1}^\infty \in l_p(X)$ et tout $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in l_p^w(Y^*)$

- (iii) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{i=1}^n |\varphi_i(T(x_i))| \leq C \|(x_i)_{i=1}^n\|_p \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*, w} \quad (1.5)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}, x_i \in X, \varphi_i \in Y^*, i = 1, \dots, n$

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) T est Cohen fortement p -sommant, alors l'opérateur

$$\begin{aligned}\widetilde{T} : l_{p^*}^w(Y^*) \times l_p(X) &\rightarrow l_1 \\ ((\varphi_i)_{i=1}^\infty, (x_i)_{i=1}^\infty) &\mapsto (\varphi_i(T(x_i)))_{i=1}^\infty\end{aligned}$$

est bien défini et bilinéaire

Soit $(x_k)_{k=1}^\infty \in l_{p^*}^w(Y^*) \times l_p(X)$ avec :

$$x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in l_{p^*}^w(Y^*) \times l_p(X)$$

telle que

$$\begin{cases} x_k = ((\varphi_{k,i})_{i=1}^\infty, (x_{k,i})_{i=1}^\infty), \text{ et } x = ((\varphi_i)_{i=1}^\infty, (x_i)_{i=1}^\infty) \\ \tilde{T}(x_k) = (\varphi_{k,i}(T(x_{k,i})))_{i=1}^\infty, \tilde{T}(x) = (\varphi_i(T(x_i)))_{i=1}^\infty \end{cases}$$

On démontre que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}(x_k) = \tilde{T}(x)$$

nous avons $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = x_i$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k,i} = \varphi_i$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k,i}(T(x_{k,i})) = \varphi_i(T(x_i))$$

car T et $\varphi_{k,i}$ sont continues, ce qui donne

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}(x_k) = \tilde{T}(x)$$

ce qui implique que \tilde{T} a une graphe fermé, alors il est continue et

$$\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(T(x_i))| = \left\| \tilde{T}((\varphi_i)_{i=1}^\infty, (x_i)_{i=1}^\infty) \right\|_{l_1} \leq \left\| \tilde{T} \right\| \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p \|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{p^*,w}$$

on prenons $C = \left\| \tilde{T} \right\|$

(iii) \Rightarrow (ii) Soit $(x_i)_{i=1}^\infty \in l_p(X)$ et $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in l_p^w(Y^*)$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(T(x_i))| &= \sup_n \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(T(x_i))| \right) \\ &\leq \sup_n \left(C \|(x_i)_{i=1}^n\|_p \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \right) \\ &= C \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p \|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i) On a

$$\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(T(x_i))| \leq C \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p \|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{p^*,w} < \infty$$

(ii) \Rightarrow (iii) Évidente ■

On pose $d_p(T) = \inf\{C \text{ vérifiant (1.5)}\}$, de plus on a $d_p(T) = \|\tilde{T}\|$

Remarque 1.3.5

i) Pour montrer que $T \in \mathcal{D}_p(X; Y)$, il suffit de démontrer (1.5)

ii) Si $T \in \mathcal{D}_p(X; Y)$ alors :

$$\|T\| \leq d_p(T) \quad (1.6)$$

En effet pour montré (1.6), on pose $n = 1$ dans (1.5).

Les trois propositions suivantes montrent que la classe \mathcal{D}_p est un idéal de Banach

Proposition 1.3.6 Soit $1 < p \leq \infty$, alors $(\mathcal{D}_p(X; Y), d_p)$ est un espace de Banach

Démonstration.

1. $\mathcal{D}_p(X; Y)$ est un espace vectoriel normé ?

(a) Soient $T, S \in \mathcal{D}_p(X; Y)$, $(x_i)_{i=1}^n \in X$, et $(\varphi_i)_{i=1}^n \in Y^*$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\varphi_i((T + S)(x_i))| &= \sum_{i=1}^n |\varphi_i(T(x_i) + S(x_i))| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\varphi_i(T(x_i))| + \sum_{i=1}^n |\varphi_i(S(x_i))| \\ &\leq (d_p(T) + d_p(S)) \|(x_i)_{i=1}^n\|_p \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*, w} \end{aligned}$$

Donc $T + S \in \mathcal{D}_p(X; Y)$, et

$$d_p(T + S) \leq d_p(T) + d_p(S)$$

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $T \in \mathcal{D}_p(X; Y)$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\varphi_i((\alpha T)(x_i))| &= \sum_{i=1}^n |\varphi_i(\alpha T(x_i))| \\ &= |\alpha| \sum_{i=1}^n |\varphi_i(T(x_i))| \\ &\leq |\alpha| d_p(T) \|(x_i)_{i=1}^n\|_p \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*, w} \end{aligned}$$

Donc $\alpha T \in \mathcal{D}_p(X; Y)$ et

$$d_p(\alpha T) \leq |\alpha| d_p(T)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} d_p(T) &= d_p\left(\frac{1}{\alpha}(\alpha T)\right) \\ &\leq \frac{1}{|\alpha|} d_p(\alpha T) \quad \text{pour } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Ce qui implique $|\alpha| d_p(T) \leq d_p(\alpha T)$,

D'où

$$d_p(\alpha T) = |\alpha| d_p(T)$$

le cas $\alpha = 0$ est évident

(c) D'après (1.6), $\|T\| \leq d_p(T) = 0 \Leftrightarrow \|T\| = 0$ alors $T = 0$

2. $\mathcal{D}_p(X; Y)$ est un espace de Banach ?

Soit $(T_n)_{n=1}^\infty$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{D}_p(X; Y), d_p)$. on a $\|T\| \leq d_p(T)$, donc $(T_n)_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X, Y)$.

On pose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T \in \mathcal{L}(X, Y)$$

On démontre que $T \in \mathcal{D}_p(X; Y)$. T_n est Cohen fortement p -sommant, alors

$\widehat{T}_n : l_p(X) \rightarrow l_p\langle Y \rangle$ est bien défini, de plus $\|\widehat{T}_n\| = d_p(T_n)$, $(\widehat{T}_n)_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(l_p(X); l_p\langle Y \rangle)$, donc il existe $A \in \mathcal{L}(l_p(X); l_p\langle Y \rangle)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{T}_n = A$$

Pour tout $(x_i)_{i=1}^\infty \in l_p(X)$, on pose

$$(y_i)_{i=1}^\infty := A((x_i)_{i=1}^\infty) \in l_p\langle Y \rangle$$

Soit $\epsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que

$$\begin{aligned} \|T_n(x_i) - y_i\| &\leq \|(T_n(x_i))_{i=1}^\infty - (y_i)_{i=1}^\infty\|_p \\ &\leq \|(T_n(x_i))_{i=1}^\infty - (y_i)_{i=1}^\infty\|_{C,p} \\ &= \|(\widehat{T}_n(x_i)_{i=1}^\infty) - A((x_i)_{i=1}^\infty)\|_{C,p} \\ &< \epsilon \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_p \end{aligned}$$

pour tout $n > n_0$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x_i) = y_i, \forall i \in \mathbb{N}$, alors $T(x_i) = y_i, \forall i \in \mathbb{N}$, et

$$(T(x_i))_{i=1}^\infty = (y_i)_{i=1}^\infty \in l_p\langle Y \rangle, \forall (x_i)_{i=1}^\infty \in l_p(X)$$

alors $\widehat{T}: l_p(X) \rightarrow l_p(Y)$ est bien défini et $T \in \mathcal{D}_p(X; Y)$, donc $\mathcal{D}_p(X, Y)$ est un espace de Banach

■

Proposition 1.3.7 *Tout opérateur de rang fini est Cohen fortement p -sommant*

Démonstration. Soient $(x_i)_{i=1}^n \in X$, $(\varphi_i)_{i=1}^n \in Y^*$ et $x^* \in X^*$, il suffit de montrer que

l'opérateur $T = x^* \otimes y$ est Cohen fortement p -sommant (car $\mathcal{D}_p(X; Y)$ est un espace vectoriel)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |\varphi_i(T(x_i))| &= \sum_{i=1}^n |\varphi_i(x^*(x_i)y)| \\
&= \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)\varphi_i(y)| \\
&\leq \|x^*\| \sum_{i=1}^n \|x_i\| |\varphi_i(y)| \\
&\leq \|x^*\| \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(y)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= \|x^*\| \|y\| \|(x_i)_{i=1}^n\|_p \left(\sum_{i=1}^n \left| \varphi_i\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \|x^*\| \|y\| \|(x_i)_{i=1}^n\|_p \sup_{z \in B_Y} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(z)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= \|x^*\| \|y\| \|(x_i)_{i=1}^n\|_p \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*, w}
\end{aligned}$$

alors $T \in \mathcal{D}_p(X, Y)$ et de plus $d_p(T) \leq \|x^*\| \|y\|$, d'autre part

$\|x^*\| \|y\| = \|T\| \leq d_p(T)$, donc

$$d_p(T) = \|x^*\| \|y\|$$

■

Proposition 1.3.8 *Si $T \in \mathcal{D}_p(X; Y)$, $U \in \mathcal{L}(E; X)$, et $V \in \mathcal{L}(Y; Z)$, Alors*

$V \circ T \circ U \in \mathcal{D}_p(E; Z)$ et

$$d_p(V \circ T \circ U) \leq \|V\| d_p(T) \|U\|$$

Démonstration. Soient $T \in \mathcal{D}_p(X; Y)$, $U \in \mathcal{L}(E; X)$, et $V \in \mathcal{L}(Y; Z)$

Soient $(e_i)_{i=1}^n \in E$, et $(\varphi_i)_{i=1}^n \in Z^*$, nous utilisons la remarque (1.1.4) on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |\varphi_i((V \circ T \circ U)(x_i))| &= \sum_{i=1}^n |(\varphi_i \circ V)(T(U(e_i)))| \\
&\leq d_p(T) \|(U(e_i))_{i=1}^n\|_p \|(\varphi_i \circ V)_{i=1}^n\|_{p^*, w} \\
&\leq d_p(T) \|U\| \|(e_i)_{i=1}^n\|_p \|V\| \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*, w} \\
&= \|V\| d_p(T) \|U\| \|(e_i)_{i=1}^n\|_p \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*, w}
\end{aligned}$$

Donc $V \circ T \circ U \in \mathcal{D}_p(E; Z)$ et

$$d_p(V \circ T \circ U) \leq \|V\| d_p(T) \|U\|$$

■

Chapitre 2

Les opérateurs multiple Cohen fortement p -sommants

2.1 Idéal multilinéaire des opérateurs Cohen fortement p -sommants

La version multilinéaire de notion du Cohen fortement p -sommant a été introduit par Achour et Mezrag dans [AM07]. Elle conserve la plupart des propriétés des opérateurs linéaire .

Dans la suite on donne la notion des opérateurs m -linéaires fortement p -sommant en utilisant les suites fortement p -sommant, cette définition est introduit par Campos dans [Camp12].

Définition 2.1.1 *Un opérateur T multilinéaire continue de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y est de rang fini s'il est somme fini d'opérateurs de la forme*

$$\begin{aligned} x_1^* \otimes \dots \otimes x_m^* \otimes y & : \quad X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow Y \\ (x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) & \longmapsto x_1^*(x^{(1)}) \dots x_m^*(x^{(m)})y \end{aligned}$$

où $x_j^* \in X_j^*(1 \leq j \leq m)$ et $y \in Y$

L'espace des opérateurs multilinéaires de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_m; Y)$

Définition 2.1.2 (Idéal des opérateurs multilinéaire) *Un idéal des opérateurs multilinéaire (ou multi-idéal) \mathcal{M} est une classe d'opérateur multilinéaire borné telle que pour tout X_1, \dots, X_m et Y des espaces de Banach on a :*

(a) *L'ensemble $\mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ qui contient $\mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_m; Y)$*

(b) *Propriété d'idéal : si $T \in \mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y)$, $u_j \in (E_j; X_j)$ et $v \in (Y, F)$ alors $v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F)$ De plus, si $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}^+$ satisfait :*

(i) *$(\mathcal{M}(X_1, \dots, X_m; Y), \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ est un espace de Banach*

(ii) *$\|A^m : \mathbb{K}^m \mapsto \mathbb{K}; A^m(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) = x^{(1)} \dots x^{(m)}\|_m = 1$*

(iii) *$\|v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m)\| \leq \|v\| \prod_{j=1}^m \|u_j\| \|T\|_{\mathcal{M}}$*

Nous allons donner la notion des opérateurs multilinéaires Cohen fortement p -sommant en utilisant les suites fortement p -sommant

Définition 2.1.3 *Soient $1 < p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$ et X_j, Y des espaces de Banach ($j = 1, \dots, m$). Un opérateur m -linéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est Cohen fortement p -sommant si*

$\left(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})\right)_{i=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ pour tout $(x_i^{(j)})_{i=1}^{\infty} \in l_{mp}(X_j), j = 1, \dots, m$

i.e. l'opérateur

$$\begin{aligned} \widehat{T} : l_{mp}(X_1) \times \dots \times l_{mp}(X_m) &\rightarrow l_p(Y) \\ \left((x_i^{(1)})_{i=1}^{\infty}, \dots, (x_i^{(m)})_{i=1}^{\infty}\right) &\mapsto \left(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})\right)_{i=1}^{\infty} \end{aligned}$$

est bien défini

L'espace des opérateurs m -linéaires Cohen fortement p -sommant de $X_1 \times \dots \times X_m$ dans Y , noté $\mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$

Proposition 2.1.4 *Soient $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ et $1 < p \leq \infty$, Alors les propriétés suivantes sont équivalents*

(i) T est Cohen fortement p -sommant

(ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^{(1)}\|^{mp} \right)^{\frac{1}{mp}} \cdots \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^{(m)}\|^{mp} \right)^{\frac{1}{mp}} \|(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}\|_{p^*, w}$$

pour tout $(x_i^{(j)})_{i=1}^{\infty} \in l_{mp}(X_j), j = 1, \dots, m$ et tout $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p^w(Y^*)$

(iii) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{i=1}^n \left| \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^{(1)}\|^{mp} \right)^{\frac{1}{mp}} \cdots \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^{(m)}\|^{mp} \right)^{\frac{1}{mp}} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*, w} \quad (2.1)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}, x_i^{(j)} \in X_j, \varphi_i \in Y^*, i = 1 \dots n, j = 1, \dots, m$

(iv) Il existe $C > 0$, telle que

$$\sum_{i=1}^n \left| \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^{(j)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{w, p^*} \quad (2.2)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}, x_i^{(j)} \in X_j, \varphi_i \in Y^*, i = 1 \dots n, j = 1, \dots, m$

(v) Il existe une probabilité de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ telle que pour tout

$(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in X_1 \times \dots \times X_m$ et tout $\varphi \in Y^*$

$$|\varphi(T(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}))| \leq C \|x^{(1)}\| \dots \|x^{(m)}\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \quad (2.3)$$

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) T est Cohen fortement p -sommant, alors l'opérateur

$$\begin{aligned} \tilde{T} : l_{p^*}^w(Y^*) \times l_{mp}(X_1) \times \dots \times l_{mp}(X_m) &\rightarrow l_1 \\ \left((\varphi_i)_{i=1}^{\infty}, (x_i^{(1)})_{i=1}^{\infty}, \dots, (x_i^{(m)})_{i=1}^{\infty} \right) &\mapsto \left(\varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right)_{i=1}^{\infty} \end{aligned}$$

est bien défini et $(m+1)$ -linéaire

Soit $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{p^*}^w(Y^*) \times l_{mp}(X_1) \times \dots \times l_{mp}(X_m)$ avec :

$$x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in l_{p^*}^w(Y^*) \times l_{mp}(X_1) \times \dots \times l_{mp}(X_m)$$

telle que

$$\begin{cases} x_k = \left((\varphi_{k,i})_{i=1}^\infty, (x_{k,i}^{(1)})_{i=1}^\infty, \dots, (x_{k,i}^{(m)})_{i=1}^\infty \right), \text{ et } x = \left((\varphi_i)_{i=1}^\infty, (x_i^{(1)})_{i=1}^\infty, \dots, (x_i^{(m)})_{i=1}^\infty \right) \\ \tilde{T}(x_k) = \left(\varphi_{k,i}(T(x_{k,i}^{(1)}, \dots, x_{k,i}^{(m)})) \right)_{i=1}^\infty, \tilde{T}(x) = \left(\varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right)_{i=1}^\infty \end{cases}$$

On démontre que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}(x_k) = \tilde{T}(x)$$

nous avons $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i}^{(j)} = x_i^{(j)}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k,i}^{(j)} = \varphi_i^{(j)}$, alors

pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k,i}(T(x_{k,i}^{(1)}, \dots, x_{k,i}^{(m)})) = \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)}))$$

car T et $\varphi_{k,i}$ sont continues, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}(x_k) = \tilde{T}(x)$$

Ce qui implique que \tilde{T} a une graphe fermé, donc il est continu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| &= \left\| \tilde{T}((\varphi_{k,i})_{i=1}^\infty, (x_{k,i}^{(1)})_{i=1}^\infty, \dots, (x_{k,i}^{(m)})_{i=1}^\infty) \right\|_{l_1} \\ &\leq \left\| \tilde{T} \right\| \left\| (x_i^{(1)})_{i=1}^\infty \right\|_{mp} \cdots \left\| (x_i^{(m)})_{i=1}^\infty \right\|_{mp} \left\| (\varphi_i)_{i=1}^\infty \right\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

Nous prenons $C = \left\| \tilde{T} \right\|$

(ii) \Rightarrow (iii) Évidente

(iii) \Rightarrow (ii) Soit $(x_i^{(j)})_{i=1}^\infty \in l_{mp}(X_j)$, $j = 1, \dots, m$ et $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in l_p^w(Y^*)$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| &= \sup_n \left(\sum_{i=1}^n \left| \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| \right) \\ &\leq \sup_n \left(C \left\| (x_i^{(1)})_{i=1}^n \right\|_{mp} \cdots \left\| (x_i^{(m)})_{i=1}^n \right\|_{mp} \left\| (\varphi_i)_{i=1}^n \right\|_{p^*,w} \right) \\ &= C \left\| (x_i^{(1)})_{i=1}^\infty \right\|_{mp} \cdots \left\| (x_i^{(m)})_{i=1}^\infty \right\|_{mp} \left\| (\varphi_i)_{i=1}^\infty \right\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i) On a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| \leq C \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left\| x_i^{(1)} \right\|_{mp}^{mp} \right)^{\frac{1}{mp}} \cdots \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left\| x_i^{(m)} \right\|_{mp}^{mp} \right)^{\frac{1}{mp}} \left\| (\varphi_i)_{i=1}^\infty \right\|_{p^*,w} < \infty$$

(iii) \Rightarrow (iv) En remplaçant $x_i^{(j)}$ par $x_i^{(j)} \frac{\left(\prod_{k=1}^m \|x_i^{(k)}\|\right)^{\frac{1}{m}}}{\|x_i^{(j)}\|}$ dans (2.1) on trouve

$$\sum_{i=1}^n \left| \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \|x_i^{(j)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{w, p^*}$$

(iv) \Rightarrow (iii) En utilisant l'inégalité de Hölder dans (2.2), avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{mp} + \dots + \frac{1}{mp}$ on trouve

$$\sum_{i=1}^n \left| \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^{(1)}\|^{mp} \right)^{\frac{1}{mp}} \dots \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^{(m)}\|^{mp} \right)^{\frac{1}{mp}} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*, w}$$

(iv) \Rightarrow (v) Voir [AM07]

(v) \Rightarrow (iv) On a

$$|\varphi(T(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}))| \leq C \|x^{(1)}\| \dots \|x^{(m)}\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left| \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| &\leq C \sum_{i=1}^n \left(\|x_i^{(1)}\| \dots \|x_i^{(m)}\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \right) \\ &\leq C \left(\sum_{i=1}^n \left(\|x_i^{(1)}\| \dots \|x_i^{(m)}\| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= C \left(\sum_{i=1}^n \left(\|x_i^{(1)}\| \dots \|x_i^{(m)}\| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} \sum_{i=1}^n |\varphi(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq C \left(\sum_{i=1}^n \left(\|x_i^{(1)}\| \dots \|x_i^{(m)}\| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{y^{**} \in B_{Y^{**}}} \sum_{i=1}^n |\varphi(y^{**})|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= C \left(\sum_{i=1}^n \left(\|x_i^{(1)}\| \dots \|x_i^{(m)}\| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*, w} \end{aligned}$$

■

On pose $\|T\|_{Coh, p} = \inf\{C \text{ vérifiant (2.1)}\}$, de plus on a $\|T\|_{Coh, p} = \|\tilde{T}\|$

Remarque 2.1.5 Si $T \in \mathcal{L}_{Coh, p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ alors :

$$\|T\| \leq \|T\|_{Coh, p} \quad (2.4)$$

En effet pour montré (2.4), on pose $n = 1$ dans (2.1)

Proposition 2.1.6 *Soit $1 < p \leq \infty$, alors $(\mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y), \|\cdot\|_{Coh,p})$ est un espace de Banach*

Démonstration.

1. $\mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un espace vectoriel normé ?

(a) Soient $T, S \in \mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$, $(x_i^{(j)})_{i=1}^n \in X_j$ ($1 \leq j \leq m$), et

$(\varphi_i)_{i=1}^n \in Y^*$, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left| \varphi_i((T+S)(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)}) + S(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| + \sum_{i=1}^n \left| \varphi_i(S(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| \\ &\leq (\|T\|_{Coh,p} + \|S\|_{Coh,p}) \prod_{i=1}^m \|(x_i^{(j)})_{i=1}^n\|_{mp} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

Donc $T + S \in \mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$, et

$$\|T + S\|_{Coh,p} \leq \|T\|_{Coh,p} + \|S\|_{Coh,p}$$

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left| \varphi_i((\alpha T)(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| &= \sum_{i=1}^n \left| \varphi_i(\alpha T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| \\ &= |\alpha| \sum_{i=1}^n \left| \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| \\ &\leq |\alpha| \|T\|_{Coh,p} \prod_{i=1}^m \|(x_i^{(j)})_{i=1}^n\|_{mp} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

Donc $\alpha T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$, et

$$\|\alpha T\|_{Coh,p} \leq |\alpha| \|T\|_{Coh,p}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \|T\|_{Coh,p} &= \left\| \frac{1}{\alpha}(\alpha T) \right\|_{Coh,p} \\ &\leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha T\|_{Coh,p} \quad \text{pour } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

Ce qui implique $|\alpha| \|T\|_{Coh,p} \leq \|\alpha T\|_{Coh,p}$,

D'où

$$\|\alpha T\|_{Coh,p} = |\alpha| \|T\|_{Coh,p}$$

le cas $\alpha = 0$ est évident

(c) D'après (2.4), $\|T\| \leq \|T\|_{Coh,p} = 0 \Leftrightarrow \|T\| = 0$ alors $T = 0$

2. $\mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un espace de Banach ?

Soit $(T_n)_{n=1}^\infty$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y), \|\cdot\|_{Coh,p})$. on a $\|T_n\| \leq \|T_n\|_{Coh,p}$, donc $(T_n)_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$.

On pose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$$

On démontre que $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$. T_n est Cohen fortement p -sommant

on a $\widehat{T}_n : l_{mp}(X_1) \times \dots \times l_{mp}(X_m) \rightarrow l_p\langle Y \rangle$ est bien défini, de plus

$\|\widehat{T}_n\| = \|T_n\|_{Coh,p}$, $(\widehat{T}_n)_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy dans

$\mathcal{L}(l_{mp}(X_1) \times \dots \times l_{mp}(X_m); l_p\langle Y \rangle)$, donc il existe $A \in \mathcal{L}(l_{mp}(X_1) \times \dots \times l_{mp}(X_m); l_p\langle Y \rangle)$

telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{T}_n = A$.

Pour tout $(x_i^{(j)})_{i=1}^\infty \in l_{mp}(X_j)$ ($j = 1, \dots, m$), on pose

$$(y_i)_{i=1}^\infty := A((x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})_{i=1}^\infty) \in l_p\langle Y \rangle$$

Soit $\epsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que

$$\begin{aligned} \|T_n(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)}) - y_i\| &\leq \|(T_n(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)}))_{i=1}^\infty - (y_i)_{i=1}^\infty\|_p \\ &\leq \|(T_n(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)}))_{i=1}^\infty - (y_i)_{i=1}^\infty\|_{C,p} \\ &= \|(\widehat{T}_n(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)}))_{i=1}^\infty - A((x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)}))_{i=1}^\infty\|_{C,p} \\ &< \epsilon \|(x_i^{(1)})_{i=1}^\infty\|_{mp} \dots \|(x_i^{(m)})_{i=1}^\infty\|_{mp} \end{aligned}$$

pour tout $n > n_0$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)}) = y_i, \forall i \in \mathbb{N}$, alors

$$T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)}) = y_i, \forall i \in \mathbb{N},$$

et

$$(T_n(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)}))_{i=1}^\infty = (y_i)_{i=1}^\infty \in l_p\langle Y \rangle, \forall (x_i^{(j)})_{i=1}^\infty \in l_{mp}(X_j)$$

alors $\widehat{T} : l_{mp}(X_1) \times \dots \times l_{mp}(X_m) \rightarrow l_p\langle Y \rangle$ est bien défini et $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$,
donc $\mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un espace de Banach.

■

Proposition 2.1.7 $\mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un Banach multi-idéal.

Démonstration.

1. $\mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$

Soient $(x_i^{(j)})_{i=1}^n \in X_j$ ($1 \leq j \leq m$), $(\varphi_i)_{i=1}^n \in Y^*$, et $x_j^* \in X_j^*$, il suffit de montrer que l'opérateur $T = x_1^* \otimes \dots \otimes x_m^* \otimes y$ est Cohen fortement p -sommant, par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left| \varphi_i(T(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(m)})) \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \varphi_i(x_1^*(x_i^{(1)}) \dots x_m^*(x_i^{(m)})y) \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| x_1^*(x_i^{(1)}) \dots x_m^*(x_i^{(m)}) \varphi_i(y) \right| \\ &\leq \|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \sum_{i=1}^n \|x_i^{(1)}\| \dots \|x_i^{(m)}\| |\varphi_i(y)| \\ &\leq \|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^{(1)}\|^{mp} \right)^{\frac{1}{mp}} \dots \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^{(m)}\|^{mp} \right)^{\frac{1}{mp}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(y)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= \|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \|y\| \prod_{j=1}^m \|(x_i^{(j)})_{i=1}^n\|_{mp} \left(\sum_{i=1}^n \left| \varphi_i\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \|y\| \prod_{j=1}^m \|(x_i^{(j)})_{i=1}^n\|_{mp} \sup_{z \in B_Y} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(z)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= \|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \|y\| \prod_{j=1}^m \|(x_i^{(j)})_{i=1}^n\|_{mp} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

alors $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ et de plus $\|T\|_{Coh,p} \leq \|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \|y\|$, d'autre part

$$\|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \|y\| = \|T\| \leq \|T\|_{Coh,p} \text{ d'où } \|T\|_{Coh,p} = \|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \|y\|$$

2. Soient $T \in \mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$, $U_j \in \mathcal{L}(E_j; X_j)$, $j = 1, \dots, m$, et $V \in \mathcal{L}(Y; Z)$, Soit $(e_i^{(j)})_{i=1}^n \in E_j$, $(\varphi_i)_{i=1}^n \in Z^*$, nous utilisons la remarque (1.1.4) on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \left| \varphi_i((V \circ T \circ (U_1, \dots, U_m))(e_i^{(1)}, \dots, e_i^{(m)})) \right| \\
&= \sum_{i=1}^n \left| (\varphi_i \circ V)(T(U_1(e_i^{(1)}), \dots, U_m(e_i^{(m)}))) \right| \\
&\leq \|T\|_{Coh,p} \prod_{j=1}^m \| (U_j(e_i^{(j)}))_{i=1}^n \|_{mp} \|(\varphi_i \circ V)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \\
&\leq \|T\|_{Coh,p} \|U_1\| \cdots \|U_m\| \prod_{j=1}^m \| (e_i^{(j)})_{i=1}^n \|_{mp} \|V\| \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \\
&= \|V\| \|T\|_{Coh,p} \|U_1\| \cdots \|U_m\| \prod_{j=1}^m \| (e_i^{(j)})_{i=1}^n \|_{mp} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*,w}
\end{aligned}$$

Donc $V \circ T \circ (U_1, \dots, U_m) \in \mathcal{L}_{Coh,p}(E_1, \dots, E_m; Z)$ et

$$\|V \circ T \circ (U_1, \dots, U_m)\|_{Coh,p} \leq \|V\| \|T\|_{Coh,p} \|U_1\| \cdots \|U_m\|$$

Donc $\mathcal{L}_{Coh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un Banach multi-idéal.

■

2.2 Les opérateurs multiple Cohen fortement p -sommants

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.2.1 Soient $1 < p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$ et X_j, Y des espaces de Banach ($j = 1, \dots, m$). Un opérateur m -linéaire $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est multiple Cohen fortement p -sommant si $\left(T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})\right)_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \in l_p\langle Y \rangle$ pour tout $\left(x_i^{(j)}\right)_{i=1}^\infty \in l_p(X_j)$, $j = 1, \dots, m$,

i.e. l'opérateur

$$\begin{aligned}
\widehat{T}: l_p(X_1) \times \cdots \times l_p(X_m) &\rightarrow l_p\langle Y \rangle \\
\left((x_{i_1}^{(1)})_{i_1=1}^\infty, \dots, (x_{i_m}^{(m)})_{i_m=1}^\infty\right) &\mapsto \left(T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})\right)_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}}
\end{aligned}$$

est bien défini

L'espace des opérateurs multiple Cohen fortement p -sommant de $X_1 \times \cdots \times X_m$ dans Y , noté $\mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$.

Notation 2.2.2 On note par

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} = \sum_{i_1}^{\infty} \cdots \sum_{i_m}^{\infty}$$

Proposition 2.2.3 Soient $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ et $1 < p \leq \infty$, Alors les propriétés suivantes sont équivalents

- (i) T est multiple Cohen fortement p -sommant
- (ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} \left| \varphi_{i_1, \dots, i_m}(T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| \leq C \left\| \left(x_i^{(1)} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_p \cdots \left\| \left(x_i^{(m)} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_p \left\| (\varphi_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \right\|_{p^*, w}$$

pour tout $\left(x_i^{(j)} \right)_{i=1}^{\infty} \in l_p(X_j)$, $j = 1, \dots, m$ et tout $(\varphi_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \in l_p^w(Y^*)$

- (iii) Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| \varphi_{i_1, \dots, i_m}(T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| \leq C \left\| \left(x_i^{(1)} \right)_{i=1}^n \right\|_p \cdots \left\| \left(x_i^{(m)} \right)_{i=1}^n \right\|_p \left\| (\varphi_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n \right\|_{p^*, w} \quad (2.5)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_i^{(j)} \in X_j$, $\varphi_{i_1, \dots, i_m} \in Y^*$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) T est multiple Cohen fortement p -sommant, alors l'opérateur

$$\begin{aligned} \tilde{T} : l_{p^*}^w(Y^*) \times l_p(X_1) \times \cdots \times l_p(X_m) &\rightarrow l_1 \\ \left((\varphi_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}}, \left(x_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^{\infty}, \dots, \left(x_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^{\infty} \right) &\mapsto \left(\varphi_{i_1, \dots, i_m} \left(T \left(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)} \right) \right) \right)_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

est bien défini et $(m+1)$ -linéaire

Soit $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in l_{p^*}^w(Y^*) \times l_p(X_1) \times \cdots \times l_p(X_m)$ avec :

$$x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in l_{p^*}^w(Y^*) \times l_p(X_1) \times \cdots \times l_p(X_m)$$

telle que

$$\begin{cases} x_k &= \left((\varphi_{k,i_1,\dots,i_m})_{i_1,\dots,i_m \in \mathbb{N}}, \left(x_{k,i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^{\infty}, \dots, \left(x_{k,i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^{\infty} \right) \\ x &= \left((\varphi_{i_1,\dots,i_m})_{i_1,\dots,i_m \in \mathbb{N}}, \left(x_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^{\infty}, \dots, \left(x_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^{\infty} \right) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \tilde{T}(x_k) &= \left(\varphi_{k,i_1,\dots,i_m} \left(T \left(x_{k,i_1}^{(1)}, \dots, x_{k,i_m}^{(m)} \right) \right) \right)_{i_1,\dots,i_m \in \mathbb{N}} \\ \tilde{T}(x) &= \left(\varphi_{i_1,\dots,i_m} \left(T \left(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)} \right) \right) \right)_{i_1,\dots,i_m \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

On démontre que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}(x_k) = \tilde{T}(x)$$

nous avons $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i}^{(j)} = x_i^{(j)}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k,i} = \varphi_i$, alors

pour tout $i \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m$, et $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}$ on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{k,i_1,\dots,i_m} \left(T \left(x_{k,i_1}^{(1)}, \dots, x_{k,i_m}^{(m)} \right) \right) = \varphi_{i_1,\dots,i_m} \left(T \left(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)} \right) \right)$$

car T et $\varphi_{k,i}$ sont continues, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{T}(x_k) = \tilde{T}(x)$$

ce qui implique que \tilde{T} a une graphe fermé, donc il est continue

$$\begin{aligned} \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{\infty} \left| \varphi_{i_1,\dots,i_m} (T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| &= \left\| \tilde{T} \left((\varphi_{i_1,\dots,i_m})_{i_1,\dots,i_m \in \mathbb{N}}, \left(x_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^{\infty}, \dots, \left(x_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^{\infty} \right) \right\|_1 \\ &\leq \left\| \tilde{T} \right\| \left\| \left(x_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^{\infty} \right\|_p \cdots \left\| \left(x_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^{\infty} \right\|_p \left\| (\varphi_{i_1,\dots,i_m})_{i_1,\dots,i_m \in \mathbb{N}} \right\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

Nous prenons $C = \left\| \tilde{T} \right\|$

(iii) \Rightarrow (ii) Soit $(x_i^{(j)})_{i=1}^{\infty} \in l_p(X_j)$, $j = 1, \dots, m$ et $(\varphi_{i_1,\dots,i_m})_{i_1,\dots,i_m \in \mathbb{N}} \in l_p^w(Y^*)$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{\infty} \left| \varphi_{i_1,\dots,i_m} (T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| &= \sup_n \left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^n \left| \varphi_{i_1,\dots,i_m} (T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| \right) \\ &\leq \sup_n \left(C \prod_{j=1}^m \left\| \left(x_i^{(j)} \right)_{i=1}^n \right\|_p \left\| (\varphi_{i_1,\dots,i_m})_{i_1,\dots,i_m \in \mathbb{N}} \right\|_{p^*,w} \right) \\ &= C \left\| \left(x_i^{(1)} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_p \cdots \left\| \left(x_i^{(m)} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_p \left\| (\varphi_{i_1,\dots,i_m})_{i_1,\dots,i_m \in \mathbb{N}} \right\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i) On a

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\infty} \left| \varphi_{i_1, \dots, i_m}(T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| \leq C \left\| \left(x_i^{(1)} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_p \cdots \left\| \left(x_i^{(m)} \right)_{i=1}^{\infty} \right\|_p \left\| (\varphi_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \right\|_{p^*, w}$$

Alors $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$

(ii) \Rightarrow (iii) Évidente ■

On pose $\|T\|_{mCoh,p} = \inf\{C \text{ vérifiant (2.1)}\}$, de plus on a $\|T\|_{mCoh,p} = \|\tilde{T}\|$

Remarque 2.2.4 Si $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$, alors :

$$\|T\| \leq \|T\|_{mCoh,p} \quad (2.6)$$

En effet pour montré (2.6), on pose $n = 1$ dans (2.5)

Proposition 2.2.5 Soit $1 < p \leq \infty$, alors $(\mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y), \|\cdot\|_{mCoh,p})$ est un espace de Banach

Démonstration.

1. $\mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un espace vectoriel normé ?

(a) Soient $T, S \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$, $x_i^{(j)} \in X_j$, et $\varphi_{i_1, \dots, i_m} \in Y^*$, $i = 1, \dots, n$,
 $i_j = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$

on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| \varphi_{i_1, \dots, i_m}((T + S)(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| \varphi_{i_1, \dots, i_m}(T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)}) + S(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| \\ &\leq \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| \varphi_{i_1, \dots, i_m}(T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| + \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| \varphi_{i_1, \dots, i_m}(S(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| \\ &\leq (\|T\|_{mCoh,p} + \|S\|_{mCoh,p}) \prod_{i=1}^m \left\| \left(x_i^{(j)} \right)_{i=1}^n \right\|_p \left\| (\varphi_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n \right\|_{p^*, w} \end{aligned}$$

Donc $T + S \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$, et

$$\|T + S\|_{mCoh,p} \leq \|T\|_{mCoh,p} + \|S\|_{mCoh,p}$$

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{K}, T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| \varphi_{i_1, \dots, i_m}((\alpha T)(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| \varphi_{i_1, \dots, i_m}(\alpha T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| \\
&\leq |\alpha| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| \varphi_{i_1, \dots, i_m}(T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| \\
&\leq |\alpha| \|T\|_{Coh,p} \prod_{i=1}^m \left\| \left(x_i^{(j)} \right)_{i=1}^n \right\|_p \left\| (\varphi_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n \right\|_{p^*, w}
\end{aligned}$$

Donc $\alpha T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$, et

$$\|\alpha T\|_{mCoh,p} \leq |\alpha| \|T\|_{mCoh,p}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\|T\|_{mCoh,p} &= \left\| \frac{1}{\alpha}(\alpha T) \right\|_{mCoh,p} \quad \text{pour } \alpha \neq 0 \\
&\leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha T\|_{mCoh,p}
\end{aligned}$$

Ce qui implique $|\alpha| \|T\|_{mCoh,p} \leq \|\alpha T\|_{mCoh,p}$,

D'où

$$\|\alpha T\|_{mCoh,p} = |\alpha| \|T\|_{mCoh,p}$$

le cas $\alpha = 0$ est évident.

(c) D'après (2.6), $\|T\| \leq \|T\|_{mCoh,p} = 0 \Leftrightarrow \|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$

2. $\mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un espace de Banach ?

Soit $(T_n)_{n=1}^\infty$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y), \|\cdot\|_{mCoh,p})$. on a $\|T_n\| \leq \|T_n\|_{mCoh,p}$, donc $(T_n)_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$.

On pose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$$

On démontre que $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$. T_n est multiple Cohen fortement p -sommant alors : $\hat{T}_n : l_p(X_1) \times \dots \times l_p(X_m) \rightarrow l_p(Y)$ est bien défini, de plus

$\|\widehat{T}_n\| = \|T_n\|_{mCoh,p}$, $(\widehat{T}_n)_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(l_p(X_1) \times \dots \times l_p(X_n); l_p\langle Y \rangle)$, donc il existe $A \in \mathcal{L}(l_p(X_1) \times \dots \times l_p(X_n); l_p\langle Y \rangle)$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{T}_n = A$.

Pour tout $(x_i^{(j)})_{i=1}^\infty \in l_p(X_j)$ ($j = 1, \dots, m$), on pose

$$(y_{i_1, \dots, i_n})_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}} := A \left(\left(x_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^\infty, \dots, \left(x_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^\infty \right)_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \in l_p\langle Y \rangle$$

Soit $\epsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que

$$\begin{aligned} & \|T_n(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)}) - y_{i_1, \dots, i_m}\| \\ & \leq \left\| (T_n(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)}))_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} - (y_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \right\|_{C,p} \\ & = \left\| \widehat{T}_n \left(\left(x_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^\infty, \dots, \left(x_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^\infty \right) - A \left(\left(x_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^\infty, \dots, \left(x_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^\infty \right) \right\|_{C,p} \\ & < \epsilon \left\| \left(x_{i_1}^{(1)} \right)_{i_1=1}^\infty \right\|_p \dots \left\| \left(x_{i_m}^{(m)} \right)_{i_m=1}^\infty \right\|_p \end{aligned}$$

pour tout $n > n_0$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)}) = y_{i_1, \dots, i_m}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, alors

$$T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)}) = y_{i_1, \dots, i_m}, \quad \forall i_j \in \mathbb{N},$$

et

$$(T_n(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)}))_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} = (y_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N}} \in l_p\langle Y \rangle, \forall (x_i^{(j)})_{i=1}^\infty \in l_p(X_j)$$

alors $\widehat{T} : l_p(X_1) \times \dots \times l_p(X_m) \rightarrow l_p\langle Y \rangle$ est bien défini et $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$, donc $\mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un espace de Banach

■

Proposition 2.2.6 *Tout opérateur multilinéaire Cohen fortement p -sommant est multiple Cohen fortement p -sommant, de plus on a :*

$$\|T\|_{mCoh,p} \leq \|T\|_{Coh,p}$$

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$, d'après (2.3) il existe une probabilité de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ telle que, pour tout $(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in X_1 \times \dots \times X_m$ et tout $\varphi \in Y^*$

$$|\varphi(T(x^{(1)}, \dots, x^{(m)}))| \leq C \|x^{(1)}\| \dots \|x^{(m)}\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\varphi(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

Alors

$$\left| \varphi_{i_1, \dots, i_m}(T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| \leq C \|x_{i_1}^{(1)}\| \dots \|x_{i_m}^{(m)}\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\varphi_{i_1, \dots, i_m}(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

pour tout $x_i^{(j)} \in X_j$, et $\varphi_{i_1, \dots, i_m} \in Y^*$, $i = 1, \dots, n$, $i_j = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$

Par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| \varphi_{i_1, \dots, i_m}(T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| \\ & \leq C \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left(\|x_{i_1}^{(1)}\| \dots \|x_{i_m}^{(m)}\| \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\varphi_{i_1, \dots, i_m}(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \right) \\ & \leq C \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left(\|x_{i_1}^{(1)}\| \dots \|x_{i_m}^{(m)}\| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \int_{B_{Y^{**}}} |\varphi_{i_1, \dots, i_m}(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ & = C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^{(1)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \dots \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^{(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_{Y^{**}}} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |\varphi_{i_1, \dots, i_m}(y^{**})|^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ & \leq C \left\| \left(x_i^{(1)} \right)_{i=1}^n \right\|_p \dots \left\| \left(x_i^{(m)} \right)_{i=1}^n \right\|_p \left(\sup_{y^{**} \in B_{Y^{**}}} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |\varphi_{i_1, \dots, i_m}(y^{**})|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ & = C \left\| \left(x_i^{(1)} \right)_{i=1}^n \right\|_p \dots \left\| \left(x_i^{(m)} \right)_{i=1}^n \right\|_p \left\| \left(\varphi_{i_1, \dots, i_m} \right)_{i_1, \dots, i_m=1}^n \right\|_{p^*, w} \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.7 $\mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ est un Banach multi-idéal.

Démonstration.

$$1. \mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_m; Y) \subset \mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$$

Soient $(x_i^{(j)})_{i=1}^n \in X_j$ ($1 \leq j \leq m$), $(\varphi_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n \in Y^*$, et $x_j^* \in X_j^*$, il suffit de montrer que l'opérateur $T = x_1^* \otimes \dots \otimes x_m^* \otimes y$ est Cohen fortement p -sommant,

par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| \varphi_{i_1, \dots, i_m}(T(x_{i_1}^{(1)}, \dots, x_{i_m}^{(m)})) \right| \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| \varphi_{i_1, \dots, i_m}(x_1^*(x_{i_1}^{(1)}) \dots x_m^*(x_{i_m}^{(m)})y) \right| \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| x_1^*(x_{i_1}^{(1)}) \dots x_m^*(x_{i_m}^{(m)}) \varphi_{i_1, \dots, i_m}(y) \right| \\
&\leq \|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \|x_{i_1}^{(1)}\| \dots \|x_{i_m}^{(m)}\| |\varphi_{i_1, \dots, i_m}(y)| \\
&\leq \|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n (\|x_{i_1}^{(1)}\| \dots \|x_{i_m}^{(m)}\|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |\varphi_{i_1, \dots, i_m}(y)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= \|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \|y\| \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^{(1)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \dots \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^{(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |\varphi_{i_1, \dots, i_m}(\frac{y}{\|y\|})|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \|y\| \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^{(1)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \dots \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^{(m)}\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{z \in B_Y} \left(\sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n |\varphi_{i_1, \dots, i_m}(z)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= \|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \|y\| \left\| \left(x_i^{(1)} \right)_{i=1}^n \right\|_p \dots \left\| \left(x_i^{(m)} \right)_{i=1}^n \right\|_p \left\| (\varphi_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n \right\|_{p^*, w}
\end{aligned}$$

alors $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$ et de plus $\|T\|_{mCoh,p} \leq \|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \|y\|$, d'autre part

$$\|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \|y\| = \|T\| \leq \|T\|_{mCoh,p}, \text{ donc}$$

$$\|T\|_{mCoh,p} = \|x_1^*\| \dots \|x_m^*\| \|y\|$$

2. Soient $T \in \mathcal{L}_{mCoh,p}(X_1, \dots, X_m; Y)$, $U_j \in \mathcal{L}(E_j; X_j)$, $j = 1, \dots, m$, et $V \in \mathcal{L}(Y; Z)$, Soit $(e_i^{(j)})_{i=1}^n \in E_j$, $(\varphi_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n \in Z^*$, nous utilisons la remarque (1.1.4) on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| \varphi_{i_1, \dots, i_m} ((V \circ T \circ (U_1, \dots, U_m))(e_{i_1}^{(1)}, \dots, e_{i_m}^{(m)})) \right| \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \left| (\varphi_{i_1, \dots, i_m} \circ V)(T(U_1(e_{i_1}^{(1)}), \dots, U_m(e_{i_m}^{(m)}))) \right| \\
&\leq \|T\|_{mCoh, p} \prod_{j=1}^m \left\| \left(U_j(e_i^{(j)}) \right)_{i=1}^n \right\|_p \left\| (\varphi_{i_1, \dots, i_m} \circ V)_{i_1, \dots, i_m=1}^n \right\|_{p^*, w} \\
&\leq \|T\|_{mCoh, p} \|U_1\| \cdots \|U_m\| \prod_{j=1}^m \left\| (e_i^{(j)})_{i=1}^n \right\|_p \|V\| \left\| (\varphi_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n \right\|_{p^*, w} \\
&= \|V\| \|T\|_{mCoh, p} \|U_1\| \cdots \|U_m\| \prod_{j=1}^m \left\| (e_i^{(j)})_{i=1}^n \right\|_p \left\| (\varphi_{i_1, \dots, i_m})_{i_1, \dots, i_m=1}^n \right\|_{p^*, w}
\end{aligned}$$

Donc $V \circ T \circ (U_1, \dots, U_m) \in \mathcal{L}_{mCoh, p}(E_1, \dots, E_m; Y)$ et

$$\|V \circ T \circ (U_1, \dots, U_m)\|_{mCoh, p} \leq \|V\| \|T\|_{mCoh, p} \|U_1\| \cdots \|U_m\|$$

■

Chapitre 3

Les polynômes m -homogènes Cohen fortement p -sommants

3.1 Polynômes m -homogènes

Définition 3.1.1 (Multilinéaire symétrique) Soient X, Y deux espaces de Banach. Soit $T : \underbrace{X \times \binom{m}{!} \times X}_{\text{multilinéaire}} \rightarrow Y$ un opérateur multilinéaire borné, l'opérateur T est dit symétrique s'il est invariant par rapport à toute permutation des variables, i.e.

$$T \circ \sigma(x_1, \dots, x_m) := T(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = T(x_1, \dots, x_m)$$

pour tout permutation σ

On note $\mathcal{L}_s(mX; Y)$ l'espace des opérateurs multilinéaires continus symétriques. Si on fait toutes les permutations possibles on peut associer à $T \in \mathcal{L}(mX; Y)$ un opérateur symétrique $T_s \in \mathcal{L}_s(mX; Y)$. Soit $T : \underbrace{X \times \binom{m}{!} \times X}_{\text{multilinéaire}} \rightarrow Y$ un opérateur multilinéaire, on pose

$$T_s = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma} T \circ \sigma$$

L'opérateur T_s s'appelle opérateur symétrisé de T , on a

1. Si $T \in \mathcal{L}(mX; Y)$, alors $T_s \in \mathcal{L}_s(mX; Y)$

2. $T_s = T$ si et seulement si, T est symétrique
3. L'opérateur linéaire $S : \mathcal{L}({}^m X; Y) \rightarrow \mathcal{L}_s({}^m X; Y) : T \rightarrow S(T) = T_s$ est une projection

A chaque $\check{P} \in \mathcal{L}_s({}^m X; Y)$, on associe un opérateur (non linéaire) $P : X \rightarrow Y$ défini par

$$P(x) = \check{P}(x, \overset{(m)}{\cdot}, x)$$

qui s'appelle polynôme homogène *de degré* m . On note $\mathcal{P}({}^m X; Y)$ l'espace de Banach des polynômes homogènes continus de degré m de X dans Y muni de la norme

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup \{ \|P(x)\| : \|x\| \leq 1 \} \\ &= \inf \{ C : \|P(x)\| \leq C \|x\|^m, \forall x \in X \} \end{aligned}$$

Si $Y = \mathbb{k}$, on écrit simplement $\mathcal{P}({}^m X)$. La correspondance $T \leftrightarrow P$ établit un isomorphisme entre $\mathcal{P}({}^m X; Y)$ et $\mathcal{L}_s({}^m X; Y)$

Proposition 3.1.2 (Formule de polarisation) *Pour tout $T \in \mathcal{L}_s({}^m X; Y)$ on a (voir [Muj86])*

$$\check{P}(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \epsilon_1 \dots \epsilon_m P \left(\sum_{j=1}^m \epsilon_j x_j \right)$$

De plus, P est borné sur la boule unité de X si et seulement si, T est borné. Les deux normes vérifient les inégalités ([Muj86])

$$\|P\| \leq \|\check{P}\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P\|$$

3.2 Idéal des polynômes m -homogènes Cohen fortement p -sommants

Définition 3.2.1 (Polynôme de rang fini) *Un opérateur polynômiale $P \in \mathcal{P}({}^m X; Y)$ est de rang fini s'il est écrit sous la forme*

$$P = x^{*m} \otimes y : x \rightarrow x^*(x)^m y$$

ou $x^* \in X^*$ et $y \in Y$

L'espace des opérateurs polynômiales m -homogènes de rang fini sera noté $\mathcal{P}_f(^mX; Y)$

Définition 3.2.2 (Idéal de polynôme) *Un idéal des polynômes homogènes \mathcal{Q} est une classe des polynômes homogènes continus tels que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et espaces de Banach X et Y , le composante $\mathcal{Q}(^mX; Y) = \mathcal{P}(^mX; Y) \cap \mathcal{Q}$ satisfait*

(1) $\mathcal{Q}(^mX; Y)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{P}(^mX; Y)$ qui contient les polynômes de rang fini

(2) *Propriété d'idéal.* Si $P \in \mathcal{Q}(^mX; Y)$, $U \in \mathcal{L}(E; X)$, et $V \in \mathcal{L}(Y; Z)$, alors $V \circ P \circ U \in \mathcal{Q}(^mE; Z)$

De plus, si $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait

(1) L'espace $(\mathcal{Q}(^mX; Y), \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ est un espace normé (de Banach)

(2) $\|P : \mathbb{k} \longrightarrow \mathbb{k}; P(x) = x^m\|_{\mathcal{Q}} = 1$ pour tout m

(3) Si $P \in \mathcal{Q}(^mX; Y)$, $U \in \mathcal{L}(E; X)$, et $V \in \mathcal{L}(Y; Z)$, alors

$$\|V \circ P \circ U\|_{\mathcal{Q}} \leq \|V\| \|P\|_{\mathcal{Q}} \|U\|^m$$

Alors $(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ s'appelle idéal des polynômes.

Les opérateurs polynômiales homogènes de degré m de type Cohen fortement p -sommant sont définis comme suite

Définition 3.2.3 *Un opérateur polynômiale m -homogène $P \in \mathcal{P}(^mX; Y)$ (X, Y sont deux espaces de Banach arbitraires et $m \in \mathbb{N}$) est Cohen fortement p -sommant ($1 < p \leq \infty$) si :*

$$(P(x_i))_{i=1}^{\infty} \in l_p\langle Y \rangle \quad \text{pour tout} \quad (x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_{mp}(X)$$

L'espace des opérateurs polynômiales m -homogènes Cohen fortement p -sommant noté $\mathcal{P}_{Coh,p}(^mX; Y)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{P}(^mX; Y)$.

Proposition 3.2.4 $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ est Cohen fortement p -sommant si et seulement si $\check{P} \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$ est Cohen fortement p -sommant

Démonstration. Supposons que $\check{P} \in \mathcal{P}_{Coh,p}(^m X; Y)$, pour tout $(x_i)_{i=1}^\infty \in l_{mp}(X)$ on a

$$(P(x_i))_{i=1}^\infty = (\check{P}(x_i, \dots, x_i))_{i=1}^\infty \in l_p\langle Y \rangle$$

il s'ensuit que $P \in \mathcal{P}_{Coh,p}(^m X; Y)$.

Inversement, soient $P \in \mathcal{P}_{Coh,p}(^m X; Y)$, et $(x_i^j)_{i=1}^\infty \in l_{mp}(X), j = 1, \dots, m$

par la formule de polarisation nous avons

$$(\check{P}(x_i^1, \dots, x_i^m))_{i=1}^\infty = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\epsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \epsilon_1 \dots \epsilon_m (P(\epsilon_1 x_1^1 + \dots + \epsilon_m x_i^m))_{i=1}^\infty \quad (3.1)$$

Maintenant, puisque $l_{mp}(X)$ est un espace vectoriel on a

$$(\epsilon_1 x_1^1 + \dots + \epsilon_m x_i^m)_{i=1}^\infty \in l_{mp}(X) \text{ pour tout } \epsilon_1, \dots, \epsilon_m = \pm 1$$

Ce qui implique que $(P(\epsilon_1 x_1^1 + \dots + \epsilon_m x_i^m))_{i=1}^\infty \in l_p\langle Y \rangle$.

Donc d'après (3.1) et puisque $l_p\langle Y \rangle$ est un espace vectoriel on a

$$(\check{P}(x_i^1, \dots, x_i^m))_{i=1}^\infty \in l_p\langle Y \rangle$$

Ce qui donne $\check{P} \in \mathcal{P}_{Coh,p}(^m X; Y)$ ■

Proposition 3.2.5 Soient $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ et $1 < p \leq \infty$, alors les propriétés suivantes sont équivalents

(i) P est Cohen fortement p -sommant

(ii) il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(P(x_i))| \leq C \left(\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{p^*, w}$$

pour tout $(x_i)_{i=1}^\infty \in l_{mp}(X)$ et tout $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in l_p^w(Y^*)$

(iii) il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{i=1}^n |\varphi_i(P(x_i))| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \quad (3.2)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}, x_i \in X, \varphi_i \in Y^*, i = 1 \dots n$

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) : P est Cohen fortement p -sommant alors, \check{P} est Cohen fortement p -sommant

d'où :

$$\sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(P(x_i))| = \sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(\check{P}(x_i, \dots, x_i))| \leq C \left(\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{p^*,w}$$

(iii) \Rightarrow (ii) Soit $(x_i)_{i=1}^\infty \in l_{mp}(X)$ et $(\varphi_i)_{i=1}^\infty \in l_p^w(Y^*)$ alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^\infty |\varphi_i(P(x_i))| &= \sup_n \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(\check{P}(x_i, \dots, x_i))| \right) \\ &\leq \sup_n \left(C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \right) \\ &= C \left(\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^\infty\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i) Évidente

(ii) \Rightarrow (iii) Évidente ■

On pose $\|P\|_{Coh,p} = \inf\{C \text{ vérifiant (3.2)}\}$.

Remarque 3.2.6 Si $P \in \mathcal{P}_{Coh,p}(^m X; Y)$, alors

$$\|P\| \leq \|P\|_{Coh,p}$$

Proposition 3.2.7 Soit $1 < p \leq \infty$, alors $(\mathcal{P}_{Coh,p}(^m X; Y), \|\cdot\|_{Coh,p})$ est un espace de Banach

Démonstration. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{P}_{Coh,p}(^m X; Y)$, on a $\|P_n - P_{\hat{n}}\| \leq \|P_n - P_{\hat{n}}\|_{Coh,p}$, donc $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{P}(^m X; Y)$ qui est un espace de Banach (voir [Muj86]) , alors converge vers une limite $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$.

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall \hat{n} > n > n_0 : \|P_n - P_{\hat{n}}\| \leq \|P_n - P_{\hat{n}}\|_{Coh,p} < \epsilon$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\forall \hat{n} > n_0$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\varphi_i((P_n - P)(x_i))| &= \sum_{i=1}^n \lim_{m \rightarrow \infty} |\varphi_i((P_n - P_{\hat{n}})(x_i))| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\varphi_i((P_n - P_{\hat{n}})(x_i))| \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|P_n - P_{\hat{n}}\|_{Coh,p} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \\ &< \epsilon \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

D'où $\|P_n - P\|_{Coh,p} < \epsilon$. Ceci qui montre que $P \in \mathcal{P}_{Coh,p}(^m X; Y)$. ■

Théorème 3.2.8 $(\mathcal{P}_{Coh,p}(^m X; Y), \|\cdot\|_{Coh,p})$ est un idéal des polynômes m -homogènes.

Démonstration.

1. Soient $(x_i)_{i=1}^n \in X$, $(\varphi_i)_{i=1}^n \in Y^*$, et $x^* \in X^*$, il suffit de montrer que

l'opérateur $P = x^{*m} \otimes y$ est Cohen fortement p -sommant

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\varphi_i(P(x_i))| &= \sum_{i=1}^n |\varphi_i(x^*(x_i)^m y)| \\ &= \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)^m \varphi_i(y)| \\ &\leq \|x^*\|^m \sum_{i=1}^n \|x_i\|^m |\varphi_i(y)| \\ &\leq \|x^*\|^m \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(y)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= \|x^*\|^m \|y\| \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \left| \varphi_i\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \|x^*\|^m \|y\| \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{z \in B_Y} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(z)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= \|x^*\|^m \|y\| \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

alors $P \in \mathcal{P}_{Coh,p}({}^mX; Y)$ et de plus $\|P\|_{Coh,p} \leq \|x^*\|^m \|y\|$, d'autre part
 $\|x^*\|^m \|y\| = \|P\| \leq \|P\|_{Coh,p}$, donc

$$\|P\|_{Coh,p} = \|x^*\|^m \|y\|$$

2. Soient $P \in \mathcal{P}_{Coh,p}({}^mX; Y)$, $U \in \mathcal{L}(E; X)$, et $V \in \mathcal{L}(Y; Z)$

Soient $(e_i)_{i=1}^n \in E$, et $(\varphi_i)_{i=1}^n \in Z^*$, nous utilisons la remarque (1.1.4) on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\varphi_i((V \circ P \circ U)(e_i))| &= \sum_{i=1}^n |(\varphi_i \circ V)(P(U(e_i)))| \\ &\leq \|P\|_{Coh,p} \left(\sum_{i=1}^n \|U(e_i)\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i \circ V)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \\ &\leq \|P\|_{Coh,p} \|U\|^m \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \|V\| \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \\ &= \|V\| \|P\|_{Coh,p} \|U\|^m \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|^{mp} \right)^{\frac{1}{p}} \|(\varphi_i)_{i=1}^n\|_{p^*,w} \end{aligned}$$

Donc $V \circ P \circ U \in \mathcal{P}_{Coh,p}({}^mE; Z)$ et

$$\|V \circ P \circ U\|_{Coh,p} \leq \|V\| \|P\|_{Coh,p} \|U\|^m$$

■

Bibliographie

- [AM07] D. ACHOUR and L. MEZRAG. *On the Cohen strongly p -summing multilinear operators*. J. Math. Anal. Appl. 327 (1) (2007), 550-563.
- [AS09] D. ACHOUR and K. Saadi. *A polynomial characterization of Hilbert spaces*. Collect. Math. 61, 3 (2010), 291-301.
- [Camp12] JAMILSON R.CAMPOS. *Cohen and multiple Cohen strongly summing multilinear operators*. Linear and Multilinear Algebra (2013)
- [Coh73] J. S. COHEN. *Absolutely p -summing, p -nuclear operators and their conjugates*, Math. Ann. 201 (1973), 177-200.
- [Dea1973] D.W. DEAN. *The equation $L(E, X^{**}) = L(E, X)^{**}$ and the principle of local reflexivity*. Proc.Amer. Math. Soc. 40, 146–148 (t973)
- [DJT95] J. DIESTL, H. JARCHOW, A. TONGE. *Absolutely summing operators*. Cambridge University Press, (1995).
- [Muj86] J. MUJICA. *Complex Analysis in Banach Spaces*. Math. Studies, Vol. 120, North Holland, Amsterdam, (1986).
- [Pie67] A. PIETSCH, *Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen*, Studia Math. 28 (1967) 333–353.
- [PR92] PELLEGRINO, D.RIBEIRO, J.O. : *On multi-ideals and polynomial ideals of Banach spaces : a new approach to coherence and compatibility*. arXiv :1101.1992v3 [math.FA]